Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и
ГОУ ЦО «Технологии обучения» г. Москвы.

Переход в другую систему отсчёта в задачах динамики

В № 3 нашего журнала за 2013 год были рассмотрены кинематические задачи, решение которых значительно упрощалось при переходе в другую систему отсчёта (СО). Однако и в динамических задачах этот метод нередко оказывается весьма эффективным. Правда, в динамике сужается круг СО, которые при этом могут быть использованы. В арсенале школьника остаются лишь инерциальные системы отсчёта (ИСО), поскольку правила действия в иных, неинерциальных, системах в школе не изучаются.

Переход в инерциальную систему отсчёта

В рассматриваемых ниже задачах мы будем использовать переход из привычной ИСО, связанной с Землёй, в ИСО, связанную с каким-либо телом, движущимся относительно Земли прямолинейно и равномерно. Напомним, что в любой из них можно пользоваться законами Ньютона и законами сохранения импульса и энергии с той же степенью надёжности, что и в ИСО, связанной с Землёй.

Задача 1. Лента горизонтального транспортёра движется со скоростью u. На ленту по касательной к ней влетает шайба, начальная скорость v которой перпендикулярна краю ленты. Найдите максимальную ширину ленты, при которой шайба достигнет другого её края, если коэффициент трения между шайбой и лентой равен μ.

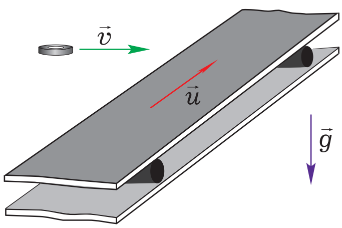

Рис. 1

Первый способ решения. Движение шайбы в ИСО, связанной с Землёй, представляется достаточно сложным. Эта сложность вызвана тем, что по мере движения шайбы меняется направление её скорости, а сила трения скольжения $F_{тр}$ всегда направлена противоположно направлению вектора скорости относительного движения шайбы и ленты. Поэтому имеет смысл перейти в ИСО, связанную с лентой траспортёра.

В ней шайба будет двигаться по прямой AB (рис. 2), направленной вдоль вектора относительной скорости.

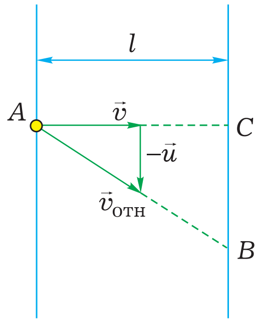

Рис. 2

При движении шайбы на неё, кроме компенсирующих друг друга сил тяжести $m\vec{g}$ и нормального давления $\vec{N}$, действует сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная против скорости её движения. Эта сила будет тормозить шайбу до её остановки в точке B у края ленты.

Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось, направленную вдоль прямой AB:

$$F_{\text{тр}}t = \Delta p, \qquad (1)$$

где $F_{\text{тр}} = \mu mg$ – сила трения скольжения, $\Delta p = m\sqrt{v^2 + u^2}$ – изменение импульса шайбы, а t – время движения шайбы до остановки.

Для определения времени движения шайбы удобно рассмотреть движение в проекциях на ось, направленную вдоль AC. В этом направлении шайба движется со средней скоростью $v/2$ и проходит расстояние l. Следовательно, время её движения равно

$$t = 2l / v.$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\mu mg\frac{2l}{v} = m\sqrt{v^2 + u^2}.$$

Откуда искомое расстояние

$$l = \frac{v\sqrt{v^2 + u^2}}{2\mu g}.$$

Ответ: $l = \dfrac{v\sqrt{v^2 + u^2}}{2\mu g}$.

Второй способ решения. К этому же ответу можно было прийти несколько иначе, используя энергетический подход. Действительно, кинетическая энергия шайбы уменьшается за счёт работы силы трения:

$$\frac{m(v^2 + u^2)}{2} = \mu mgs, \qquad (2)$$

где s – расстояние AB, пройденное шайбой до остановки. Его можно найти из подобия треугольника расстояний ABC и треугольника скоростей:

$$\frac{l}{s} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}} \Rightarrow l = s\frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}}. \qquad (3)$$

Подставив в (3) расстояние s из (2), получим тот же результат.

Перейдём теперь к задаче, аналогичной предлагавшейся на одном из заключительных этапов Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задача 2. Плот оттолкнули под прямым углом от берега со скоростью, равной скорости течения реки. На рисунке 3 показана траектория движения плота относительно берега. Через 5 с после начала движения плот находился в точке A. В каких точках он находился через 10 с и 15 с после начала движения?

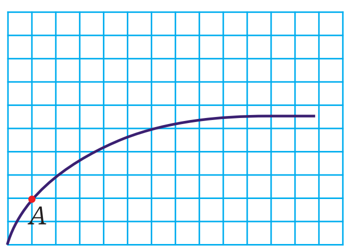

Рис. 3

Используем снова приём перехода в подвижную ИСО, связанную с течением. Будем считать, что в момент начала движения плота мимо него проплывал вблизи берега спасательный круг с веб-камерой, регистрирующей движение плота и неподвижной относительно воды.

Изобразим на рис. 4 направление вектора $\vec{v}_{\text{отн}}$ начальной скорости плота в СО, связанной с течением. Из условия следует, что скорость плота v равна скорости u течения, поэтому вектор $\vec{v}_{\text{отн}}$ будет направлен под углом 45° к берегу.

На плот со стороны воды будет действовать сила сопротивления, направленная противоположно вектору скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$.

Через 5 с плот будет находиться в точке A, а каково же в этот момент положение веб-камеры? Его легко найти построением, если учесть, что камера плывёт рядом с берегом и наблюдает за плотом, нацелившись на него под углом 45° к берегу. Проводим через точку A прямую BO, параллельную вектору $\vec{v}_{\text{отн}}$, тогда в момент времени 5 с в точке O её пересечения с берегом должна находиться веб-камера. Физический смысл точки B тоже достаточно прозрачен: именно в этой точке находился бы плот, если бы не было силы сопротивления воды.

После этого дальнейшее решение становится проще: отметим на рисунке точки O_1 и O_2, в которых окажется веб-камера через 10 и 15 с. Так как скорость течения постоянна, то $O^*O = \frac{1}{2}O^*O_1 = \frac{1}{3}O^*O_2$; аналогично $O^*B = \frac{1}{2}O^*B_1 = \frac{1}{3}O^*B_2$. Итак, искомые точки A_1 и A_2 находятся на пересечении траектории движения плота и прямых B_1O_1 и B_2O_2 соответственно.

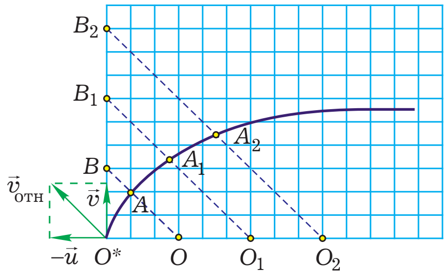

Рис. 4

Ответ: точки A_1 и A_2 на рисунке 4.

При решении некоторых задач иногда бывает полезно рассматривать движение поочерёдно в двух ИСО. Пример рационального совместного использования двух систем отсчёта рассмотрим, решая задачу 3.

Задача 3 (МФТИ, 1982)**.** Лёгкая нерастяжимая нить длины l соединяет две бусинки A и B. Бусинку B передвигают с постоянной скоростью v_0 по прямой спице MO. В результате этого бусинка A массы m движется по спице CD, изогнутой в виде дуги окружности радиуса $R = l\sqrt{3}$. Найти силу натяжения нити в тот момент, когда бусинка B будет на расстоянии l от точки O. Трение отсутствует, спицы и нить находятся в горизонтальной плоскости (рис. 5).

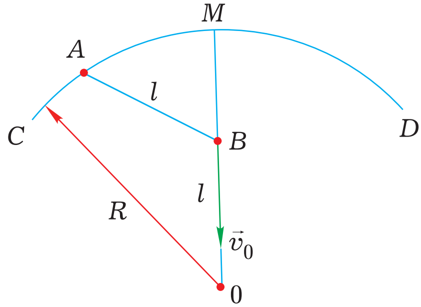

Рис. 5

Решение задачи начнём с того, что разберёмся в её геометрии. По условию задачи натяжение нити нужно искать в очень удобной точке, когда треугольник ABO становится равнобедренным. Это значительно упрощает математические преобразования, в то время как физическая сущность задачи остаётся во всей своей полноте. Из указанного треугольника при дополнительном условии $R = l\sqrt{3}$ легко найти, что $\angle AOB = \alpha = 30°$.

В СО, связанной с Землёй, бусинка A движется по окружности радиуса R. Поскольку сила тяжести компенсируется вертикальной составляющей силы реакции опоры (спицы), то рассмотрим лишь действие сил в горизонтальном направлении. Изобразим их на рисунке 6: T – сила натяжения нити, N – горизонтальная составляющая силы реакции опоры. Скорость v бусинки A относительно СО «Земля» в указанный момент времени равна скорости v_0 бусинки B. Это следует из условия нерастяжимости нити: проекции скоростей бусинок на направление нити AB должны быть равны, значит равны и модули этих скоростей, т. к. их векторы направлены под равными углами $2\alpha = 60°$ к данному направлению. Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона в проекциях на направление AO:

$$T\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\frac{\sqrt{3}}{2} - N = m\frac{v_0^2}{l\sqrt{3}}. \qquad (4)$$

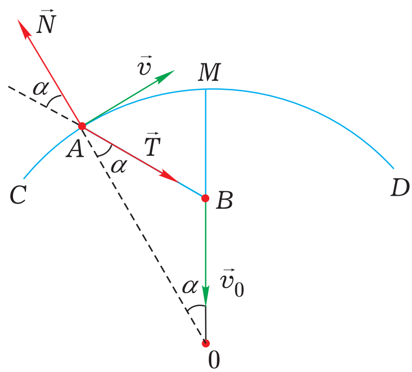

Рис. 6

Перейдём в СО, связанную с бусинкой B. Отметим сразу, что, поскольку бусинка B движется с постоянной скоростью, эта СО является инерциальной, поэтому можно смело использовать законы Ньютона. Заметим, что относительно бусинки B бусинка A движется по окружности радиуса l. Из рисунка 7 видно, что скорость v_1 бусинки A в этой СО равна $v_1 = 2v_0\cos\alpha = v_0\sqrt{3}$.

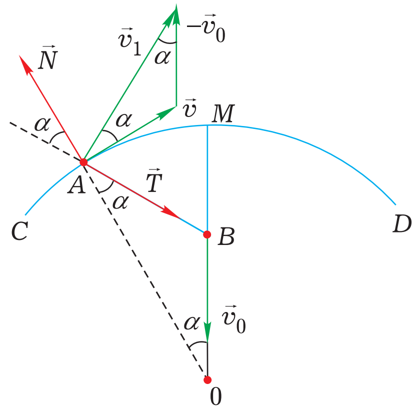

Рис. 7

Уравнение второго закона Ньютона в подвижной СО имеет вид:

$$T - N\cos\alpha = m\frac{v_1^2}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T - N\frac{\sqrt{3}}{2} = m\frac{3v_0^2}{l}. \qquad (5)$$

Решая совместно уравнения (4) и (5), определим искомое натяжение нити:

$$T = \frac{10mv_0^2}{l}.$$

Ответ: $T = \dfrac{10mv_0^2}{l}$.

В некоторых случаях переход в другую СО позволяет увидеть в новой задаче «доброго старого знакомого» – задачу, которую решали прежде.

Задача 4. Маленький грузик подвешен на нити длиной l. С какой постоянной скоростью v надо начать перемещать точку подвеса в горизонтальном направлении, чтобы грузик совершил полный оборот?

Если попытаться решать эту задачу в привычной СО, связанной с Землёй, то придётся исследовать и сопоставлять движение двух тел: точки подвеса и грузика. В таком виде задача достаточно сложна, чтобы решить её школьными методами.

Если же перейти в ИСО, связав её с точкой подвеса, то решение станет значительно проще. Действительно, в данной СО условие может быть сформулировано иначе:

«Маленький грузик подвешен на нити длиной l. Какую скорость надо сообщить грузику в горизонтальном направлении, чтобы он совершил полный оборот?».

Теперь задача приняла привычный вид, и её решение становится стандартным.

Приведём краткое решение.

Обозначим минимальную скорость, которую необходимо сообщить грузику для того, чтобы он совершил полный оборот, через v_{min}, а его скорость в верхней точке – через v_1. Тогда из закона сохранения энергии следует

$$\frac{mv_{min}^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mg(2l). \qquad (6)$$

При минимальной начальной скорости грузик, проходя верхнюю точку, не будет испытывать натяжение нити. Следовательно, его центростремительное ускорение будет создаваться только силой тяжести. Поэтому, записав уравнение второго закона Ньютона для грузика в верхней точке

$$mg = \frac{mv_1^2}{l},$$

выразим из него v_1^2 и подставим в (6), откуда находим

$$v_{min} = \sqrt{5gl}.$$

Ответ: $v \geq v_{min} = \sqrt{5gl}$.

Переход в неинерциальную систему отсчёта

Неинерциальные системы отсчёта нельзя использовать в динамической части решения задачи (разумеется, речь идёт лишь о школьных методах), но использование их в кинематической части по-прежнему бывает весьма полезно.

Задача 5 (МИФИ, 2006). На передний край тележки массой M, движущейся со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности, кладут брусок массой m (рис. 8). Начальная скорость бруска относительно Земли равна нулю. Какой должна быть длина тележки, чтобы брусок в дальнейшем не упал с неё? Коэффициент трения между бруском и тележкой равен μ.

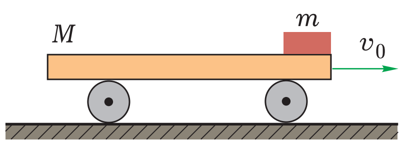

Рис. 8

На брусок в горизонтальном направлении действует сила трения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg,$$

сообщая ему ускорение

$$a_1 = \mu g.$$

Та же по модулю сила действует на тележку, сообщая ей тормозящее тележку ускорение

$$a_2 = \frac{\mu mg}{M}.$$

Перейдём в неинерциальную СО, связанную с тележкой. В ней ускорение бруска

$$a_{12} = a_1 + a_2 = \frac{\mu g(m+M)}{M}. \qquad (7)$$

До остановки брусок пройдёт путь

$$L = \frac{v_0^2}{2a_{12}}. \qquad (8)$$

Подставив в (8) выражение (7), получим:

$$L = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m+M)}.$$

Ответ: $L = \dfrac{Mv_0^2}{2\mu g(m+M)}$.

Задача 6 *(Московская городская физическая олимпиада, 2003)***.** В системе, изображённой на рисунке 9, блоки имеют пренебрежимо малые массы, нить невесомая и нерастяжимая, не лежащие на блоках участки нити горизонтальны. Массы грузов, лежащих на горизонтальной плоскости, одинаковы и равны M. Нить тянут за свободный конец в горизонтальном направлении с силой F. С каким ускорением движется конец нити, к которому приложена эта сила? Трения нет, движение грузов считайте поступательным.

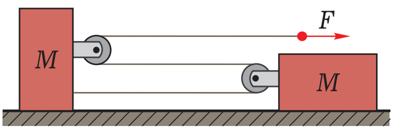

Рис. 9

Поскольку нить невесома, сила её натяжения одинакова по модулю во всех точках. Следовательно, на левый груз в горизонтальном направлении вправо действует сила $3F$, которая сообщает ему ускорение

$$a_1 = \frac{3F}{M}.$$

Аналогично, сила $2F$, действующая на правый груз влево, сообщает ему ускорение

$$a_2 = \frac{2F}{M}.$$

Перейдём теперь в неинерциальную СО, связанную с левым грузом. В ней правый груз имеет ускорение

$$a_0 = a_1 + a_2 = \frac{5F}{M},$$

направленное влево. Осталось определить ускорение конца нити относительно левого груза. Для этого заметим, что при смещении правого груза на x влево конец нити переместится вправо на $2x$, т. е. вдвое дальше. Поэтому его ускорение относительно левого груза будет вдвое больше ускорения правого груза:

$$a_{\text{отн}} = \frac{10F}{M}.$$

Для определения искомого ускорения осталось лишь вернуться в систему отсчёта, связанную с Землёй:

$$a = a_{\text{отн}} + a_1 = \frac{13F}{M}.$$

Ответ: $a = \dfrac{13F}{M}$.

Как видим, решение этой олимпиадной задачи с помощью метода перехода в другую СО получилось достаточно простым. Лишь в конце решения нужно не забыть вернуться в неподвижную СО.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Ньютоновские цвета спектра

Хотя спектр солнечного света многоцветен, по традиции в нём выделяют 7 цветов. Считается, что это число первым выбрал Исаак Ньютон. Но сначала в своей «Оптике» он назвал только 5 из них: красный, жёлтый зелёный, голубой и фиолетовый. А потом, стремясь установить соответствие (которое казалось ему естественным) между числом цветов спектра и числом музыкальных нот, добавил ещё два: оранжевый и синий.