Когда помогают графики

М.БОНДАРОВ

Эта статья посвящена решению задач на прямолинейное равноускоренное движение. Довольно часто их можно встретить в заданиях ЕГЭ и олимпиад различного уровня. Обычно в авторских решениях подобных задач преобладает аналитический подход. При этом используются либо только две основные формулы:

$$v_x = v_{0x} + a_x t\ ,$$

$$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}\ ,$$

либо добавляются к ним еще две вспомогательные:

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x s_x\ ,$$

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t\ .$$

Этих формул достаточно для решения любой задачи на данную тему.[1] Здесь же будет рассказано о способе, который представляется незаслуженно редко используемым: решение задач с помощью графика зависимости скорости от времени.

Основная идея графического метода достаточно проста: для определения пройденного пути нужно найти численно равную ему площадь под графиком скорости. При этом во многих случаях определить геометрически указанную площадь (тем самым, решить задачу или существенно продвинуться в ее решении) оказывается значительно легче, чем вычислить искомое расстояние аналитически. Напомним, что к вопросам использования графиков в различных ситуациях журнал «Квант» обращался неоднократно.[2]

Особенно полезным графический метод оказывается при решении задач на равноускоренное движение без начальной скорости, например при свободном падении тел. Посмотрим, как график позволит нам выявить некоторые важные особенности такого движения. Для этого на листочке в клеточку изобразим график зависимости скорости тела от времени (рис.1). Выберем удобный масштаб (каждая клетка – 1 секунда по горизонтали, хотя можно было бы взять любой другой промежуток времени) и удобный наклон прямой ($45°$ к горизонтальной оси). Выделим желтым цветом треугольник под графиком с основанием, равным одной клетке. Его площадь численно равна пути s_1, пройденному телом за первую секунду. Сразу бросается в глаза важная закономерность: путь, пройденный телом за вторую секунду движения (выделено красным цветом), втрое больше пути s_1, а за третью секунду (выделено зеленым) – равен $5s_1$ и т.д. Таким образом, график вывел нас на так называемый закон нечетных чисел:

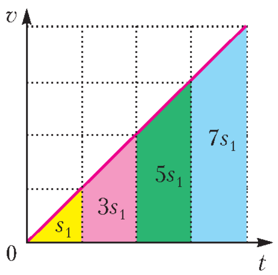


Рис. 1

в равноускоренном движении без начальной скорости перемещения, совершенные телом за последовательные равные промежутки времени, относятся как последовательный ряд нечетных чисел.

Легко рассчитать, что свободно падающее тело за первую секунду падения проходит путь, равный 5 м (полезно запомнить!). Зная это, можно быстро найти путь, пройденный этим телом за любую секунду. Например, за пятую секунду свободного падения тело проходит путь $s_{4-5} = 9s_1 = 45$ м.

Рассмотрим более подробно, как применяется закон нечетных чисел на примере задач из ЕГЭ разных лет. Напомним, что задачи уровня А не нужно сопровождать пояснениями, поэтому для их решения подойдет любой способ. Ясно, что особенно хорош тот прием, который позволяет прийти к верному ответу быстрее. В задачах уровня С необходимо представить полное решение, поэтому, используя график, надо обязательно пояснить, каким образом с его помощью получен верный ответ. Однако, даже если вы решали задачу аналитически, с помощью графика можно быстро убедиться в верности вашего решения или обнаружить возможную ошибку. Чтобы нагляднее продемонстрировать преимущества графического метода, некоторые задачи будем решать двумя способами.

Задача 1. *Тело, свободно падающее с некоторой высоты без начальной скорости, за время $\tau = 1$ с после начала движения проходит путь в $n = 5$ раз меньший, чем за такой же промежуток времени в конце движения. Найдите полное время движения тела.*

Аналитический способ решения. За время τ в начале движения тело проходит путь

$$s_1 = \frac{g\tau^2}{2}\ .$$

За то же время в конце падения пройденный путь равен

$$s = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\tau)^2}{2}\ ,$$

где t – полное время движения. По условию,

$$s = ns_1\ .$$

Тогда получаем

$$\frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\tau)^2}{2} = n\frac{g\tau^2}{2}\ .$$

После несложных преобразований находим

$$t = \frac{n+1}{2}\tau = 3\ \text{с}\ .$$

Графический способ решения. Посмотрим на график зависимости скорости тела от времени (см. рис.1). Из него ответ получается мгновенно: поскольку путь, пройденный свободно падающим телом за первую секунду движения, в 5 раз меньше пути, пройденного за последнюю секунду, то полное время движения в три раза больше времени $\tau = 1$ с, т.е. $t = 3$ с.

Задача 2. *Тело, падающее без начальной скорости, за последнюю секунду падения прошло путь $s^* = 35$ м. Какую скорость имело тело в момент падения на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Аналитический способ решения. Выразим путь s^* как разность путей, пройденных телом за все время падения t и

[1] См., например, статью А.Черноуцана «Равноускоренное движение по прямой» («Квант» №1 за 2011 г.).

[2] Отметим лишь две публикации: статью В.Бодика и И.Стрешинского «О графическом способе решения некоторых физических задач» («Квант» №4 за 1987 г.) и статью Б.Мукушева «Метод графических оценок» («Квант» №12 за 1989 г.).

за время $(t-\tau)$, где $\tau = 1$ с:

$$s^* = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

После раскрытия скобок и других преобразований определим время падения:

$$t = \frac{s^*}{g\tau} + \frac{\tau}{2}.$$

Тогда скорость тела в момент падения равна

$$v = gt = \frac{s^*}{\tau} + \frac{g\tau}{2} = 40 \text{ м/с}.$$

Графический способ решения. Заметим, что путь s^* в 7 раз больше пути $s_1 = 5$ м, пройденного за первую секунду падения. Из графика (см. рис.1) видно, что общее время падения равно 4 с, поэтому искомая скорость равна $v = 40$ м/с.

Задачу можно решить и без использования закона нечетных чисел. Из условия легко находится средняя скорость тела на последнем участке:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s^*}{t} = 35 \text{ м/с}.$$

На графике зависимости $v(t)$ эта скорость является средней линией трапеции. Тогда искомая скорость равна

$$v = v_{\text{ср}} + g\frac{\tau}{2} = 40 \text{ м/с}.$$

Задача 3. *Свободно падающее тело в последние $\tau = 10$ с своего движения проходит 3/4 всего пути. Определите высоту, с которой падало тело без начальной скорости.*

Аналитический способ решения. За все время падения t тело проходит путь

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

за время $(t-\tau)$ –

$$\frac{1}{4}s = \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Подставив s из первого уравнения во второе, получим

$$\frac{1}{4}\frac{gt^2}{2} = \frac{g(t-\tau)^2}{2},$$

откуда находим

$$t = 2\tau.$$

Тогда искомая высота равна

$$s = \frac{g(2\tau)^2}{2} = 2000 \text{ м}.$$

Графический способ решения. Разобьем весь путь s на два участка: начальный – длиной $s/4$ и конечный – длиной $3s/4$. Обратите внимание, что их пути относятся как 1:3. Из графика зависимости $v(t)$ следует, что промежутки времени, необходимые для прохождения этих участков, должны быть одинаковыми, т.е. общее время падения тела t равно 20 с. Следовательно, искомая высота равна

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \text{ м/с}^2 \cdot 20^2 \text{ с}^2}{2} = 2000 \text{ м}.$$

Задача 4. *На последнем километре тормозного пути скорость поезда при торможении с постоянным ускорением уменьшилась на 10 м/с. Определите время торможения, если скорость в начале тормозного пути была 72 км/ч.*

Заметим, что торможение тела легко заменить на его разгон.

Аналитический способ решения. Пусть поезд начал тормозить в точке A, а остановился в точке C (рис.2). Последний километр – это участок $BC = s = 1$ км, он является частью всего тормозного пути AC. Скорости в точках A и B равны $v_A = 72$ км/ч $= 20$ м/с и $v_B = 10$ м/с. Обозначим через a модуль ускорения поезда. Требуется найти время движения t на участке AC. Имеем

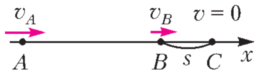


Рис. 2

$$v_A = at,$$

$$v_B^2 = 2as.$$

Выразив a из первого уравнения и подставив во второе, получим

$$t = \frac{2sv_A}{v_B^2} = 400 \text{ с}.$$

Графический способ решения. Изобразим график скорости поезда с учетом числовых данных задачи (рис.3). При этом масштаб по оси времени можно выбрать произвольно из соображений удобства – построив, например, равнобедренный треугольник. Из графика сразу видно, что выделенная зеленым площадь (по условию численно равная 1 км) в четыре раза меньше площади большого треугольника (численно равной всему тормозному пути). Зная площадь S и высоту v треугольника, определяем его основание t:

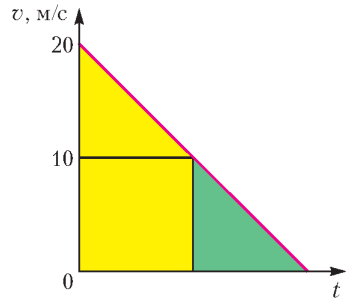


Рис. 3

$$S = \frac{vt}{2}, \text{ откуда } t = \frac{2S}{v} = \frac{2 \cdot 4000 \text{ м}}{20 \text{ м/с}} = 400 \text{ с}.$$

Задача 5. *За пятую секунду прямолинейного движения с постоянным ускорением тело проходит путь $s = 5$ м и останавливается. Какой путь s_{1-2} проходит тело за вторую секунду этого движения?*

Эту задачу будем решать только с помощью графика скорости.

Решение. Построим график зависимости скорости тела от времени (рис.4), выделив на нем цветом площади, численно равные расстояниям, пройденным за вторую и пятую секунды движения. Теперь ответ очевиден:

$$s_{1-2} = 7s = 35 \text{ м}.$$

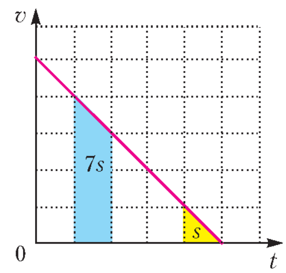


Рис. 4

– Что ж, преимущества графического метода и закона нечетных чисел показаны убедительно! – может заметить критически настроенный читатель.

– Однако хорошо видно, что для решения задач отбирались лишь те, в которых числовые данные в условиях специально подобраны для получения быстрого ответа. Но как быть в тех случаях, когда такого удобного упрощения нет?

Действительно, даже совсем небольшое изменение числовых данных в условии вводит запрет на применение закона нечетных чисел. Например, если в задаче 1 положить $n = 6$, а в задаче 2 считать $s^* = 36$ м, то прийти быстро к ответу не удастся. И все же, вряд ли разумно проходить мимо возможности сразу получить верный ответ в том случае, когда это позволяет условие задачи.

Что же касается графического способа, то его возможности значительно шире. Покажем это на примере решения нескольких конкретных задач.

Задача 6 (МАИ). *В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь вдвое больший, чем в предыдущую секунду. С какой высоты падало тело?*

Решение. Построим график зависимости скорости от времени и укажем на нем рассматриваемые пути (рис.5). Весь путь состоит из трех участков, причем продолжительности двух последних из них известны: $t_1 = 1$ с и $t_2 = 1$ с, а длительность первого обозначим t_0. Тогда скорости тела в конце этих участков равны соответственно

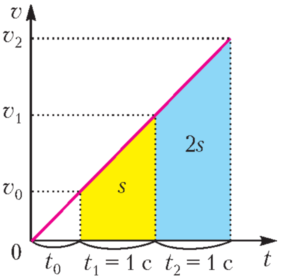


Рис. 5

$$v_0 = at_0\,,\quad v_1 = a\left(t_0 + t_1\right),$$

$$v_2 = a\left(t_0 + t_1 + t_2\right).$$

Запишем выражения для путей (численно равных выделенным цветом площадям на рисунке 5), пройденных за каждую из двух последних секунд:

$$s = \frac{v_0 + v_1}{2}t_1 = \frac{at_0 + a\left(t_0 + t_1\right)}{2}t_1\,,$$

$$2s = \frac{v_1 + v_2}{2}t_2 = \frac{a\left(t_0 + t_1\right) + a\left(t_0 + t_1 + t_2\right)}{2}t_2\,.$$

Подставив s из первого уравнения во второе, получим

$$2\frac{at_0 + a\left(t_0 + t_1\right)}{2}t_1 = \frac{a\left(t_0 + t_1\right) + a\left(t_0 + t_1 + t_2\right)}{2}t_2\,,$$

откуда

$$t_0 = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - 2t_1^2}{2\left(2t_1 - t_2\right)} = 0{,}5 \text{ с}.$$

Теперь легко найти искомую высоту:

$$H = \frac{g\left(t_0 + t_1 + t_2\right)^2}{2} \approx 31 \text{ м}.$$

Задача 7. *Время отправления электрички по расписанию 12.00. На ваших часах 12.00, но мимо вас уже начинает проезжать предпоследний вагон, который движется мимо вас в течение $t_1 = 10$ с. Последний вагон проходит мимо вас в течение $t_2 = 8$ с. Электричка отправилась вовремя и движется равноускоренно. На какое время отстают ваши часы?*

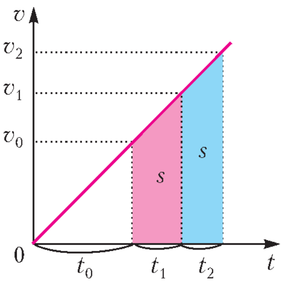


Рис. 6

Решение. Построим график зависимости скорости электрички от времени, отсчитываемого от начала движения (рис.6). Отметим на нем значения скоростей электрички в те моменты времени, когда мимо пассажира проезжает: 1) начало предпоследнего вагона – $v_0 = at_0$; 2) начало последнего вагона – $v_1 = a\left(t_0 + t_1\right)$; 3) конец последнего вагона – $v_2 = a\left(t_0 + t_1 + t_2\right)$. Поскольку длины вагонов одинаковые, то выделенные цветом площади трапеций также равны:

$$\frac{at_0 + a\left(t_0 + t_1\right)}{2}t_1 = \frac{a\left(t_0 + t_1\right) + a\left(t_0 + t_1 + t_2\right)}{2}t_2\,,$$

откуда после несложных преобразований найдем

$$t_0 = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2\left(t_1 - t_2\right)} = 31 \text{ с}.$$

Определив время отставания часов, попробуем найти ответ еще на один интересный вопрос: около какого вагона оказался пассажир в момент появления на перроне? Ответить на него несложно, поскольку нам известно общее время движения поезда: $t = 31$ с + 10 с + 8 с = 49 с. Тогда легко записать выражение для длины той части поезда, которая равна расстоянию от места расположения пассажира до хвоста поезда:

$$ns = \frac{at^2}{2}\,,$$

где n – число вагонов от хвоста поезда до пассажира. С другой стороны, формулу для расчета длины вагона мы уже использовали:

$$s = \frac{at_0 + a\left(t_0 + t_1\right)}{2}t_1\,.$$

Из двух последних уравнений найдем число вагонов:

$$n = \frac{t^2}{\left(2t_0 + t_1\right)t_1} \approx 3{,}3\,.$$

Дробный ответ не должен нас смущать. Видимо, пассажир в момент отправления поезда появился из подземного перехода, расположенного напротив четвертого от хвоста поезда вагона.

Задача 8 (МГУ, физфак, 2007). *Велосипедист, двигаясь равноускоренно, проезжает мимо четырех столбов, стоящих друг за другом на одинаковом расстоянии. Расстояние между первыми двумя столбами он проехал за время $t_1 = 2$ с, а между вторым и третьим – за $t_2 = 1$ с. Найдите время t_3 движения велосипедиста между третьим и четвертым столбами.*

Решение этой задачи осложнено математическими преобразованиями. Мы намеренно не будем решать задачу в общем виде, чтобы избежать громоздких выкладок. Заметим, что при таком способе решения надо быть предельно внимательным, поскольку исчезает возможность обнаружить ошибку с помощью проверки размерности.

Аналитический способ решения. Покажем только основные этапы решения. Пусть расстояние между столбами s, скорость велосипедиста в момент проезда первого столба v_0, а его ускорение a. Кинематические уравнения имеют вид

$$s = v_0t_1 + \frac{at_1^2}{2}\,,$$

$$s = \left(v_0 + at_1\right)t_2 + \frac{at_2^2}{2}\,,$$

$$s = \left(v_0 + at_1 + at_2\right)t_3 + \frac{at_3^2}{2}\,.$$

Вводя обозначения $t_0 = \dfrac{2v_0}{a}$ и $\tau = \sqrt{\dfrac{2s}{a}}$, последнее из этих уравнений приведем к виду

$$t_3^2 + 2\left(t_1 + t_2 + \frac{t_0}{2}\right)t_3 - \tau^2 = 0\,.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$t_3 = -\left(t_1 + t_2 + \frac{t_0}{2}\right) + \sqrt{\left(t_1 + t_2 + \frac{t_0}{2}\right)^2 + \tau^2}\,.$$

Чтобы получить ответ, осталось найти t_0 и τ. Для этого воспользуемся первым и вторым кинематическими уравнениями движения велосипедиста (в новых обозначениях):

$$\tau^2 = t_0t_1 + t_1^2\,,$$

$$\tau^2 = \left(t_0 + 2t_1\right)t_2 + t_2^2\,.$$

Решая эту систему, находим

$$t_0 = \frac{t_2^2 - t_1^2 + 2t_1t_2}{t_1 - t_2} = 1 \text{ с},$$

$$\tau^2 = \frac{(t_1 + t_2)t_1t_2}{t_1 - t_2} = 6 \text{ с}^2.$$

Следовательно,

$$t_3 = \left(-3{,}5 + \sqrt{3{,}5^2 + 6}\right) \text{ с} \approx 0{,}77 \text{ с}.$$

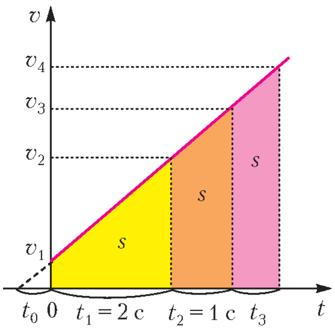


Рис. 7

Графический способ решения. Изобразим на рисунке 7 график зависимости скорости велосипедиста от времени. Пусть велосипедист начал движение за время t_0 от момента прохождения первого столба. Тогда, двигаясь далее с ускорением a и проезжая мимо первого столба, он имел скорость $v_1 = at_0$, его скорость в момент проезда второго столба была $v_2 = a(t_0 + t_1) = a(t_0 + 2)$, третьего – $v_3 = a(t_0 + t_1 + t_2) = a(t_0 + 3)$ и четвертого – $v_4 = a(t_0 + t_1 + t_2 + t_3) = a(t_0 + 3 + t_3)$. Поскольку площади под графиками скорости численно равны пройденным расстояниям, а расстояния s между столбами по условию одинаковы, можно приравнять площади трех трапеций:

$$\frac{a(t_0 + t_0 + 2)}{2}\cdot 2 = \frac{a(t_0 + 2 + t_0 + 3)}{2}\cdot 1 = \frac{a(t_0 + 3 + t_0 + t_3)}{2}\cdot t_3,$$

или

$$4t_0 + 4 = 2t_0 + 5 = (2t_0 + 6 + t_3)t_3.$$

Из левого равенства сразу определяем время t_0 от начала движения до момента прохождения первого столба:

$$2t_0 = 1, \text{ откуда } t_0 = 0{,}5 \text{ с}.$$

После подстановки найденного значения t_0 правое равенство принимает вид

$$t_3^2 + 7t_3 - 6 = 0,$$

откуда легко находим искомое время t_3 движения велосипедиста между третьим и четвертым столбами:

$$t_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{73} - 7\right) \text{ с} \approx 0{,}77 \text{ с}.$$

В разобранных выше задачах тела двигались все время с постоянным ускорением. Покажем, что графический способ очень удобен и для тех задач, где рассматривается несколько этапов движения. Начнем с классической задачи о движении тела, состоящем из трех этапов: разгона, равномерного движения и торможения.

Задача 9 («МАИ», 2011, олимпиада). *Трамвай прошел расстояние между соседними остановками за $t = 6$ мин, причем в начале он двигался равноускоренно, затем равномерно, а в конце равнозамедленно. На разгон и торможение ушло в общей сложности $\Delta t = 2$ мин, а скорость равномерного движения была $v = 5$ м/с. Определите расстояние между остановками трамвая.*

Аналитический способ решения. Обозначим время разгона трамвая через t_0. Тогда время торможения равно $\Delta t - t_0$. За время t_0 трамвай пройдет расстояние

$$s_1 = \frac{a_1 t_0^2}{2},$$

где ускорение трамвая на первом этапе равно

$$a_1 = \frac{v}{t_0}.$$

Отсюда получаем

$$s_1 = \frac{vt_0}{2}.$$

Находим далее расстояние, пройденное трамваем при его равномерном движении:

$$s_2 = v(t - \Delta t)$$

и, наконец, расстояние на третьем этапе движения – при его торможении:

$$s_3 = v(\Delta t - t_0) - \frac{a_2(\Delta t - t_0)^2}{2},$$

где ускорение (по модулю) равно

$$a_2 = \frac{v}{\Delta t - t_0}.$$

Отсюда получаем

$$s_3 = \frac{v(\Delta t - t_0)}{2}.$$

Теперь окончательно находим расстояние между остановками:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{vt_0}{2} + v(t - \Delta t) + \frac{v(\Delta t - t_0)}{2} = \frac{v(2t - \Delta t)}{2} = 1500 \text{ м}.$$

Графический способ решения. Построим график скорости трамвая (рис.8), указав на нем данные из условия задачи. Мы не знаем, сколько времени было затрачено на разгон, и сколько – на торможение. К счастью, для ответа на вопрос задачи этого и не требуется, ведь площадь трапеции зависит (при неизменной высоте) лишь от суммы ее оснований. Таким образом, искомое расстояние между остановками численно равно

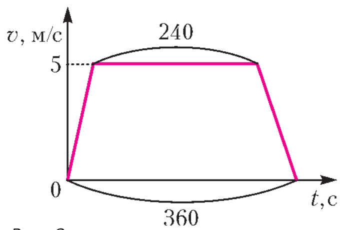


Рис. 8

$$s = v\frac{t + (t - \Delta t)}{2} = 5 \text{ м/с}\,\frac{360 \text{ с} + 240 \text{ с}}{2} = 1500 \text{ м}.$$

Рассмотрим теперь задачи с разворотом, когда меняется направление движения тела.

Задача 10. *Аэростат поднимается с земли вертикально вверх с ускорением $a = 2$ м/с^2. Через $t_0 = 5$ с от начала движения аэростата из него выпал предмет. Через сколько времени этот предмет упадет на землю? Начальная скорость аэростата равна нулю.*

Аналитический способ решения. Через время t_0 аэростат и предмет поднимутся на высоту

$$h = \frac{at_0^2}{2}$$

и приобретут скорость

$$v_0 = at_0.$$

Далее предмет движется с постоянным ускорением, проекция которого на направленную вверх ось x равна $-g$. Проекция перемещения предмета за все время до падения на землю равна $s_x = -h$. Тогда

$$-h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} .$$

Подставив в это выражение значения h и v_0 , получим квадратное уравнение

$$-\frac{at_0^2}{2} = at_0 t - \frac{gt^2}{2} \text{, или } \frac{gt^2}{2} - at_0 t - \frac{at_0^2}{2} = 0 .$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$t = t_0 \frac{a}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a}}\right) \approx 3{,}4 \text{ с} .$$

Графический способ решения. Построим график зависимости проекции скорости предмета на вертикальную ось x от времени (рис.9). Здесь t_1 – время самостоятельного полета предмета до верхней точки траектории, t_2 – время его движения от верхней точки до падения на землю. Обратим внимание, что модуль изменения скорости предмета одинаков на промежутках времени t_0 и t_1 . Поэтому

$$at_0 = gt_1 \text{, откуда } t_1 = \frac{a}{g} t_0 .$$

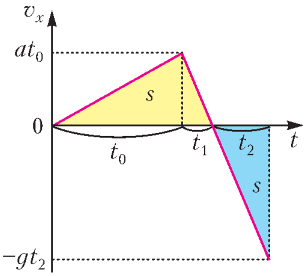


Рис. 9

Поскольку выделенные цветом на графике площади одинаковы (модули перемещения предмета вверх и вниз равны), то

$$\frac{1}{2} at_0 (t_0 + t_1) = \frac{1}{2} gt_2^2 .$$

Подставив сюда найденное значение t_1 , получим

$$t_2 = t_0 \sqrt{\frac{a}{g}\left(1 + \frac{a}{g}\right)} = t_0 \frac{a}{g} \sqrt{1 + \frac{g}{a}} .$$

Окончательно, искомое время будет равно

$$t = t_1 + t_2 = t_0 \frac{a}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a}}\right) \approx 3{,}4 \text{ с} .$$

И в заключение покажем применение графического метода к задачам, немного отличающимся от всех, разобранных выше.

Задача 11. *С высоты H = 30 м свободно падает стальной шарик. При падении он сталкивается с неподвижной плитой, плоскость которой наклонена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, и взлетает на высоту h = 15 м над землей. Каково время падения шарика до удара о плиту? Удар шарика о плиту считать абсолютно упругим.*

Решение. Сначала изобразим на рисунке 10 траекторию движения шарика и заданные в условии величины. Для определения искомого времени падения шарика до удара о плиту надо знать только расстояние s до нее. За время падения до столкновения с плитой шарик набирает некоторую скорость v_1 . Если бы плита была горизонтальной, то шарик подпрыгнул бы на прежнюю высоту s (поскольку удар абсолютно упругий). Но плоскость плиты в задаче наклонена, значит, высота подъема уменьшится. Однако наклон этот подобран авторами очень удачно: после отскока вертикальная составляющая скорости уменьшится ровно вдвое (а горизонтальная проекция скорости нас вообще не интересует). Поэтому шарик поднимется вверх на $s/4$ (высота подъема пропорциональна квадрату начальной скорости). Из рисунка 10 следует, что расстояние от земли до точки удара шарика о плиту равно, с одной стороны, $(H - s)$, а с другой – $(h - s/4)$. Для определения s надо решить уравнение

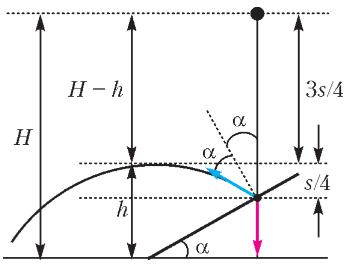


Рис. 10

$$30 - s = 15 - \frac{s}{4} ,$$

откуда получаем s = 20 м. А дальше совсем просто: на 20 метров свободно падающее тело опустится за 2 секунды – такие расчеты можно сделать в уме.

График, изображенный на рисунке 11, позволяет представить процессы, описанные в задаче, более наглядно. Выходит, что задачу можно было решить, не прибегая к сложным математическим выкладкам, почти устно!

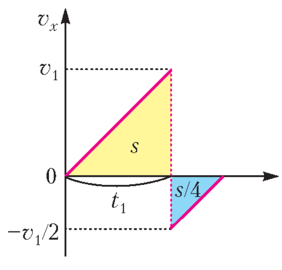


Рис.11

Задача 12. *В ракете находятся математический и пружинный маятники с одинаковым периодом колебаний T = 1 с. Ракета начинает движение вертикально вверх с ускорением $a = 10g$. На высоте h = 5 км двигатель выключается, и ракета продолжает подниматься до максимальной высоты. Сколько колебаний сделает каждый маятник за время работы двигателя ракеты и за все время подъема? Сопротивлением воздуха и уменьшением силы земного тяготения с высотой пренебречь.*

Решение. Время t_0 работы двигателя найти совсем просто:

$$h = \frac{at_0^2}{2} \text{, откуда } t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{h}{5g}} = 10 \text{ с} .$$

Использование графика скорости (рис.12) позволит легко найти и общее время t подъема ракеты. Заметим, что после

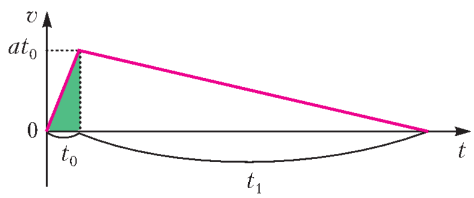


Рис. 12

выключения двигателя ракета движется с ускорением, модуль которого в 10 раз меньше модуля ускорения на участке разгона ракеты, при этом модуль изменения скорости на обоих участках одинаков. Значит, время t_1 торможения ракеты в 10 раз больше времени t_0 ее разгона:

$$t_1 = 10t_0 = 100 \text{ с} .$$

Тогда общее время подъема ракеты равно

$$t = 11t_0 = 110 \text{ с} .$$

Теперь перейдем к особенностям колебаний маятников.

Период колебаний пружинного маятника определяется только его внутренними характеристиками – массой m и

(Продолжение см. на с. 56)

Задача 4. XVIII век. Полдень

В истории науки в разное время использовались разные системы мер. Эта задача – использовать исторические (ныне устаревшие) единицы измерений.

4.1. Вычислите мощность солнечной энергии, падавшей в конце XVIII века на единицу территории окрестностей местечка Дубингай в полуденное время: зимой, весной, осенью и летом. Ответ необходимо дать в «новых» физических единицах, которые тогда вводились в действие на этой территории: лошадиных силах на квадратную версту.

4.2. Оцените также, какова была в то время мощность солнечной энергии, падавшей на одну местную лошадь. Ответ тоже необходимо выразить в физических единицах, которые тогда вводились в действие. Чему можно удивиться, получив правильный ответ?

Задача 5. XXI век. Полдень

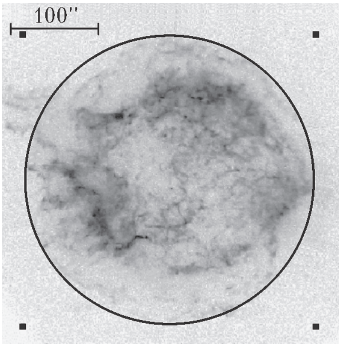
Как известно, Литовская Республика использует исчисление времени UT+02 зимой и UT+03 летом.

5.1. Есть ли в Литве такие пункты, в которых сегодня (8 сентября 2013 года) Солнце будет находиться точно на юге в тот момент, когда часы жителей этого пункта покажут 12:00 («да» или «нет»)?

5.2. А вообще, в другие дни года, найдутся ли такие пункты («да» или «нет»)? Если «да», то вычислите, в какие даты, если «нет», то обоснуйте это с помощью вычислений.

Задача 6. Остаток вспышки сверхновой

С помощью космического телескопа «Чандра» было получено рентгеновское изображение остатка вспышки сверхновой SNR в Cas A, расположенной от нас на расстоянии $d = 3400$ пк. Негатив этого снимка представлен на рисунке. Кругом помечены границы области SNR. В верхнем левом углу рисунка – масштаб. Точка, расположенная вблизи центра круга, – нейтронная звезда (ядро взорвавшейся звезды). Прямоугольные значки вне круга – реперные точки для построения центра круга. Предположим, что энергия, выделившаяся при взрыве сверхновой, была порядка $E \approx 10^{46}$ Дж и что 1% этой энергии движет расширяющуюся материю. Средняя плотность вещества в SNR порядка $\rho \approx 10^{-21}$ кг/м^3.



6.1. Оцените возраст SNR Cas A.

6.2. Рассчитайте среднюю скорость движения нейтронной звезды от центра SNR.

Группа β

Задача 1. Радиоастрон

Радиоастрон – это международный научный проект, возглавляемый Астрокосмическим центром Российской академии наук. 18 июля 2011 года на эллиптическую орбиту вокруг Земли был выведен спутник «Спектр-Р» с 10-метровым (в диаметре) космическим радиотелескопом. Вместе с наземными радиотелескопами «Спектр-Р» работает как интерферометр. Радиоастрон работает на стандартных радиоастрономических длинах волн 1,19–1,63 см (K-диапазон), 6,2 см (C-диапазон), 18 см (L-диапазон) и 92 см (P-диапазон). В настоящее время «Спектр-Р» обращается по сильно вытянутой эллиптической орбите с периодом $\tau = 8{,}3$ суток и высотой перигея $h = 600$ км от поверхности Земли.

1.1. Оцените максимальную разрешающую способность (угловое разрешение в угловых секундах) Радиоастрона. С помощью схематического рисунка объясните, в какой ситуации это реализуется.

1.2. Оцените разрешающую способность Радиоастрона при наблюдениях объектов, расположенных по направлению большой оси орбиты «Спектра-Р»; решение также сопроводите рисунком.

Задача 2. См. задачу 2 (условие и вопрос **2.1.**) для группы α.

2.2. Предположим, что на планете Глизе 581 g есть разумная жизнь. Цивилизация пользуется радиоволнами. Можно ли с помощью наблюдений на Радиоастроне определить размер (диаметр) планеты («да» или «нет»)? Ответ обоснуйте с помощью вычислений.

Задача 3. См. задачу 3 (условие и вопросы **3.1.** и **3.2.**) для группы α.

3.3. Оцените угловой диаметр звезды Глизе 581 при наблюдениях с планеты Глизе 581 g.

4-6. См. задачи 4–6 для группы α.

Публикацию подготовил М.Гаврилов

Когда помогают графики

(Начало см. на с. 47)

жесткостью k – и не зависит от состояния его движения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Поэтому секундный пружинный маятник совершит 10 колебаний за время работы двигателя и 110 колебаний – за все время полета.

Период колебаний математического маятника в неподвижной ракете равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

а при работающем двигателе –

$$T^* = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}.$$

Из двух последних равенств находим

$$T^* = T\sqrt{\frac{g}{g+a}} = T\sqrt{\frac{1}{11}}.$$

Следовательно, за время работы двигателя математический маятник совершит

$$N = \frac{t_0}{T^*} = \frac{t_0\sqrt{11}}{T} \approx 33 \text{ колебания.}$$

После выключения двигателя ракеты математический маятник окажется в невесомости, и его колебания прекратятся.