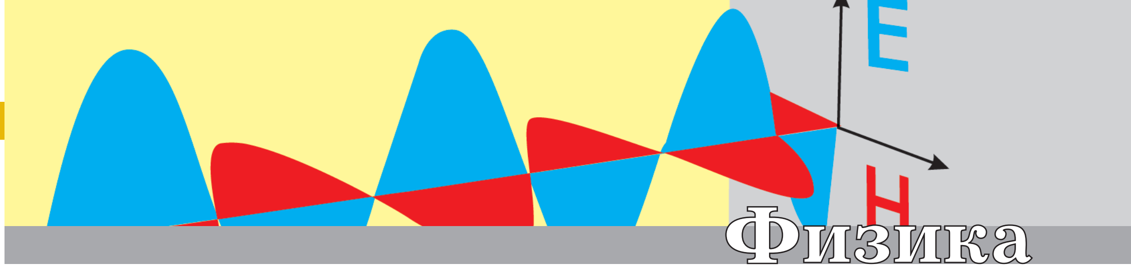

Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и
ГОУ ЦО «Технологии обучения» г. Москвы.

Переход в другую систему отсчёта в задачах кинематики

Одним из часто применяемых приёмов в решении задач повышенной сложности на движение нескольких тел является использование перехода в другую систему отсчёта (СО). Особенно часто этот приём находит применение в кинематических задачах. В статье разбираются в основном решения классических задач, вошедших в широко известные сборники задач и прошедшие испытание временем на многих поколениях школьников.

Переход в другую систему отсчёта при равномерном прямолинейном движении

Мы ограничимся только некоторыми типами задач на равномерное прямолинейное движение, в которых целесообразно использовать переход в другую СО. Разобьём их на три класса, назвав условно:

1) «Течение»;
2) «Дороги»;
3) «Стенка».

Удачный выбор СО позволяет сократить математические выкладки, а в некоторых случаях даже свести решение задачи к устному расчёту. Для начала напомним условие классической задачи на движение по течению и против него. Подобные задачи можно встретить почти в любом сборнике задач как по физике, так и по математике.

Задача 1. Рыбак плывёт на лодке вверх по реке; проезжая под мостом, он уронил в воду соломенную шляпу. Через полчаса он это обнаружил и повернул назад. Сколько времени рыбак догонял шляпу, если он грёб одинаково, двигаясь вверх и вниз по реке?

Задача придумана очень давно, но те, кто знакомится с ней впервые, дают совершенно разные ответы. Одни вспоминают, что скорость лодки по течению больше, чем в неподвижной воде, и говорят, что рыбак догонит лодку быстрее, чем за полчаса. Другие считают наоборот: рыбак против течения двигался медленно, поэтому, утверждают они, и удалиться он смог не очень далеко, догонять же ему придётся на значительно большем пути. И лишь некоторые уверены, что догонять шляпу рыбак будет столько же времени, сколько удалялся от неё.

Кто же прав в этом споре? Ответ

получить несложно, если перейти в СО, связанную с рекой.

Представим себе, что на шляпе находится наблюдатель (например, установлена веб-камера, следящая за движением лодки и передающая нам информацию). Тогда наблюдатель установит, что полчаса лодка будет удаляться от него на некоторое расстояние, после чего она начнёт приближаться к нему с прежней по модулю скоростью. Но для возвращения лодке придётся пройти относительно шляпы то же расстояние, на которое она удалилась от неё. А раз так, то время приближения лодки к шляпе равно времени удаления от неё; то есть в СО, связанной со шляпой, это равенство времён становится совершенно очевидным.

Ответ: 0,5 ч.

Заметим, что ответ не изменится, если река извилистая. Только расстояния надо отсчитывать вдоль русла реки.

Рассмотрим теперь задачу, предлагавшуюся на олимпиаде МГУ более полувека назад.

Задача 2. Идущая вверх по реке моторная лодка встретила сплавляемые по течению реки плоты. Через час после встречи лодочный мотор заглох. Ремонт мотора продолжался 30 мин. В течение этого времени лодка свободно плыла вниз по течению. После ремонта лодка поплыла вниз по течению с прежней относительно воды скоростью и нагнала плоты на расстоянии s = 7,5 км от места их первой встречи. Определите скорость течения реки, считая её постоянной.

Первый способ решения.

Как правило, большинство задач на движение решается в неподвижной СО, связанной с Землёй. Попробуем и мы сначала применить этот подход к решению данной задачи. Обозначим t_1 = 1 ч – время движения лодки против течения, t_2 = 0,5 ч – время ремонта, когда лодка двигалась со скоростью течения, и t_3 – время, в течение которого лодка нагоняла плоты. Тогда скорость течения реки

$$u = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Таким образом, для определения скорости течения нужно найти только время t_3.

Как известно, по течению лодка движется со скоростью $v + u$, а против течения – со скоростью $v - u$. Плот же движется относительно берега всё время со скоростью течения u. Изобразим на рисунке 1 перемещения лодки и плота в течение всех рассмотренных промежутков времени.

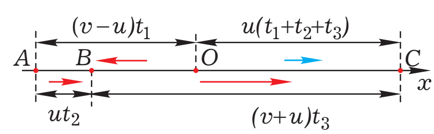

Рис. 1

Так как $AB + BC = AO + OC$, можно записать уравнение:

$$ut_2 + (v + u)t_3 = (v - u)t_1 + u(t_1 + t_2 + t_3),$$

откуда после раскрытия скобок следует, что время возвращения лодки к плотам равно времени удаления от них:

$$vt_3 = vt_1 \Rightarrow t_3 = t_1.$$

Таким образом, искомая скорость течения

$$u = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{7,5}{1 + 0,5 + 1} = 3 \text{ км/ч.} \quad (*)$$

Ответ: 3 км/ч.

Второй способ решения.

Простота полученного ответа может навести на мысль, что к нему можно было прийти более коротким путём.

После разбора решения задачи 1, перейдя в СО, связанную с течением, мы можем, практически не прибегая к математическим выкладкам, утверждать, что время t_1 удаления лодки от плота и время t_3 её возвращения к нему равны друг другу, поскольку скорость лодки относительно воды не менялась по величине. После этого останется лишь использовать выражение (*).

Увидев преимущество перехода в подвижную СО, мы больше не будем пытаться решать задачи в СО, связанной с Землёй, а попробуем поискать иной способ решения, связав СО с одним из движущихся тел. Эффективность данного приёма проиллюстрируем на множестве задач, разобранных ниже.

Перейдём теперь к рассмотрению задач второго класса, условно названных «Дороги». К ним относятся задачи на движение по прямолинейным траекториям двух и более тел. При их решении удобно связать СО с одним из движущихся тел. Начнём снова с очень простой задачи.

Задача 3. Товарный поезд длины $l_1 = 630$ м и экспресс длины $l_2 = 120$ м идут по двум параллельным путям в одном направлении со скоростями $v_1 = 48{,}6$ км/ч и $v_2 = 102{,}6$ км/ч соответственно. В течение какого времени экспресс будет обгонять товарный поезд?

Задачу, конечно же, можно решать, записав уравнения зависимости координат движущихся тел от времени, но мы попробуем сразу перейти в СО, связанную с товарным поездом. В ней экспресс движется со скоростью $v_{2-1} = v_2 - v_1$. Из рисунка 2 видно, что для обгона ему требуется пройти расстояние $l = l_1 + l_2$.

Следовательно, искомое время обгона равно

$$t = \frac{l}{v_{2\text{-}1}} = \frac{l_1 + l_2}{v_2 - v_1} = 50\,\text{с}.$$

Ответ: 50 с.

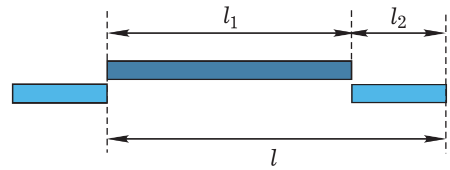

Рис. 2

Перейдём к более сложной задаче, в которой движутся с разными скоростями по параллельным прямым четыре объекта: два пламени свечей и две тени.

Задача 4. Две свечи, высоты которых в начальный момент были одинаковы и равны h, находятся на расстоянии a друг от друга. Расстояние между каждой свечой и ближайшей к ней стеной также равно a (рис. 3). С какой скоростью u_1 движется тень от правой свечи по правой стене и с какой скоростью u_2 движется тень от левой свечи по левой стене, если левая свеча сгорает за время t_1, а правая – за t_2?

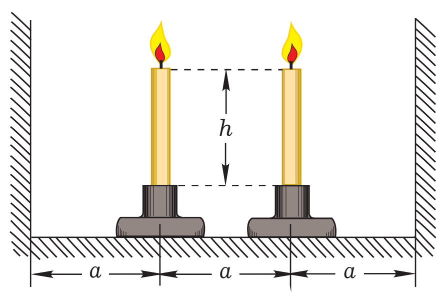

Рис. 3

Относительно пола пламя левой свечи движется со скоростью $v_1 = h/t_1$, а пламя правой свечи – со скоростью $v_2 = h/t_2$ (пусть для определённости $v_2 > v_1$). Перейдём в СО, связанную с пламенем левой свечи. В ней пламя правой свечи движется вниз со скоростью $v_{2\text{-}1} = v_2 - v_1$. Заметим, что правая стена находится от левой свечи вдвое дальше, чем правая свеча. Тогда тень на правой стене (от правой свечи) будет двигаться вдвое быстрее пламени правой свечи:

$$u = 2v_{2-1} = 2(v_2 - v_1).$$

Не забудем, что мы нашли скорость тени относительно пламени левой свечи! Поэтому нужно вернуться в СО, связанную с Землёй, добавив к найденной скорости u скорость пламени левой свечи:

$$u_2 = u + v_1 = 2v_2 - v_1.$$

Подставив в это выражение указанные выше значения скоростей v_1 и v_2, получим

$$u_2 = \frac{h(2t_1 - t_2)}{t_1 t_2}.$$

Осталось лишь найти скорость тени, движущейся по левой стене. Это можно сделать аналогично описанному выше способу, но если обратить внимание на симметрию в условии задачи, то можно сразу, без решения, записать выражение для скорости u_1.

Ответ:

$$u_1 = \frac{h(2t_2 - t_1)}{t_1 t_2};\ u_2 = \frac{h(2t_1 - t_2)}{t_1 t_2}.$$

Решение аналогичных задач на движение тел по прямолинейным траекториям несколько усложняется, если траектории не параллельны. Рассмотрим самый простой случай, когда дороги перпендикулярны друг другу.

Задача 5. Два автомобиля приближаются к перекрёстку по взаимно перпендикулярным дорогам с постоянными скоростями $v_1 = 9$ м/с и $v_2 = 12$ м/с. В момент времени, когда первый автомобиль достиг перекрёстка, второй находился от него на расстоянии $l = 30$ м. Определите минимальное расстояние между автомобилями в процессе их движения.

Если решать эту задачу в СО, связанной с Землёй, то нужно записать уравнение зависимости координаты каждого автомобиля от времени (рис. 4):

$$x = -l + v_2 t;$$
$$y = v_1 t.$$

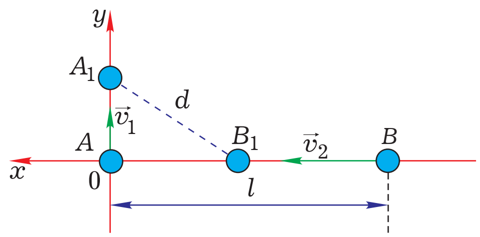

Рис. 4

Тогда расстояние d между автомобилями в произвольный момент времени (оно обозначено на рис. 4 пунктиром) связано с координатами x и y соотношением:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-l + v_2 t)^2 + (v_1 t)^2}.$$

По условию задачи требуется найти минимальное расстояние между автомобилями d_{min}. Для тех, кто умеет дифференцировать, это не составит труда, однако можно обойтись и без высшей математики.

Конечно же, в этом случае требуется просто перейти в СО, связанную, например, с первым автомобилем. На рисунке 5 показано, как определяется относительная скорость второго автомобиля $v_{2\text{-}1}$, и его траектория BC в этой СО.

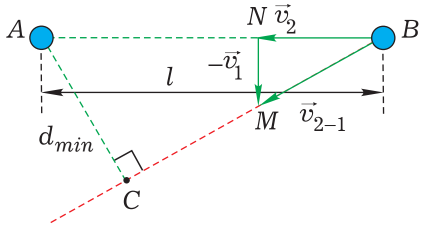

Рис. 5

Очевидно, что искомое кратчайшее расстояние между телами d_{min} – это отрезок AC – перпендикуляр к прямой BC. Его легко найти из подобия треугольников ABC и MBN:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{MN}{BM} \Rightarrow \frac{d_{min}}{l} = \frac{v_1}{v_{2-1}},$$

где $v_{2-1} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Откуда $d_{min} = l\dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 18\,\text{м}$.

Ответ: 18 м.

Попробуйте для тренировки решить аналогичную задачу.

Задача 6. Два автомобиля движутся по взаимно перпендикулярным дорогам со скоростями $v_1 = 30$ м/с и $v_2 = 20$ м/с. В тот момент, когда расстояние между автомобилями было минимальным, первый автомобиль находился на расстоянии $l_1 = 500$ м от точки пересечения дорог. На каком расстоянии от этой точки находился в этот момент второй автомобиль? (Ответ: 750 м.)

Подсказка: перейдите в СО, связанную со вторым автомобилем (рис. 6).

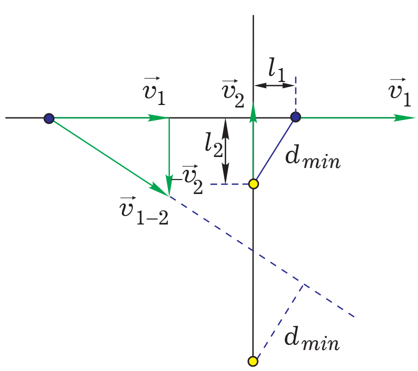

Рис. 6

Во многих задачах можно встретить упругое столкновение шара со стенкой. При этом в качестве стенки может быть принято любое тело, масса которого значительно больше массы другого тела, с которым оно сталкивается. Это требуется для того, чтобы при их взаимодействии существенно не изменилась скорость тела большой массы. Например, стенкой можно считать теннисную ракетку во время удара о шарик.

Для того чтобы рассчитать изменение скорости шара при ударе о стенку, полезно использовать переход в другую СО, связав её со стенкой.

Рассмотрим сначала старинную физтеховскую олимпиадную задачу.

Задача 7. Человек шёл по дороге со скоростью $u = 2$ м/с. Концом ботинка он случайно зацепил лежащий на земле маленький мячик. С какой скоростью полетел мячик?

Вначале обратим внимание на одну маленькую хитрость в задаче. Если человек по условию задачи идёт со скоростью $u = 2$ м/с, то его нога в момент удара движется вдвое быстрее: $v = 2u = 4$ м/с. Конечно, речь идёт о той ноге, которая бьёт по мячу (ботинок второй ноги в этот момент неподвижен относительно Земли).

Итак, перед нами возникло немного изменённое условие задачи.

С какой скоростью начнёт двигаться мячик массой m, если его ударит стенка массой $M >> m$, движущаяся со скоростью $v = 4$ м/с (рис. 7*а*)?

Перейдём в СО, связанную со стенкой. В ней мячик будет двигаться к стенке со скоростью $v = 4$ м/с (рис. 7*б*). После абсолютно упругого удара о стенку он отскочит от неё со скоростью $v = 4$ м/с (рис. 7*в*). Теперь осталось лишь вернуться в СО, связанную с Землёй; в ней мячик будет двигаться со скоростью $2v = 8$ м/с (рис. 7*г*).

Ответ: 8 м/с.

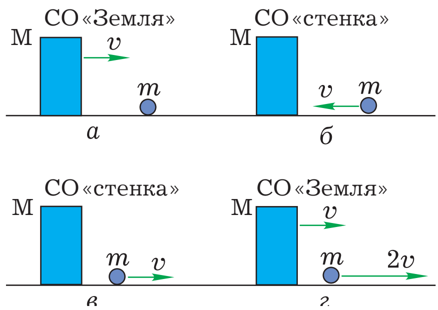

Рис. 7

Указанная закономерность может пригодиться при решении многих задач, поэтому её полезно запомнить: стенка, ударив о неподвижное тело, сообщит ему скорость, вдвое большую, чем имеет сама. Для тренировки попробуйте самостоятельно решить задачу, которую ежедневно практически решают на тренировках и в играх футболисты всего мира.

Задача 8. Футболист должен остановить ногой летящий на него со скоростью v мяч. В какую сторону и с какой скоростью он должен двигать ногу? (Ответ: от мяча со скоростью $v/2$.)

И ещё одна задача, ответ в которой можно проверить экспериментально.

Задача 9. Имеются два абсолютно упругих шара с массами m и M ($m << M$). Шары падают с высоты h на пол. На какую высоту подскочит маленький шар, если удар о пол абсолютно упругий (рис. 8). Сопротивлением воздуха пренебречь. Размеры шаров значительно меньше h, центры шаров до и после соударений находятся на одной вертикали.

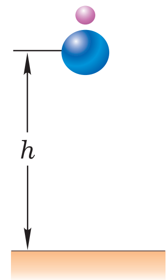

Рис. 8

За мгновение до удара шары имеют практически одинаковую скорость v, которую легко найти, например, из закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}\,.$$

После абсолютно упругого удара большого шара о пол этот шар полетит вверх со скоростью v навстречу маленькому шару. В СО, связанной с большим шаром, маленький будет приближаться к нему со скоростью $2v$, а после абсолютно упругого удара отскочит от него с той же по модулю скоростью вверх. При этом относительно Земли маленький шар будет иметь сразу после удара скорость $3v$. (Для более наглядного представления о происходящих процессах полезно сделать рисунки, аналогичные рисункам 7*а* – 7*г*.)

Поскольку высота подъёма шара пропорциональна квадрату скорости, то маленький шар поднимется на высоту $9h$.

Ответ: $9h$.

Переход в другую систему отсчёта при равноускоренном движении

Итак, разобранные выше задачи позволяют утверждать, что переход в СО, связанную с одним из равномерно движущихся тел, во многих случаях оказывается весьма полезным. А как быть в случае, когда оба тела движутся с одинаковым ускорением? Оказывается, что и в этом случае, связав СО с одним из тел, можно получить ответ значительно проще и быстрее. Рассмотрим подобный случай на примере нескольких задач.

Задача 10. Два камня находятся

на одной вертикали на расстоянии l = 20 м друг от друга. В некоторый момент времени верхний камень бросают вертикально вниз со скоростью v_0 = 2 м/с, а нижний камень отпускают без начальной скорости. Через какое время камни столкнутся? Сопротивление воздуха не учитывать.

Первый способ решения.

Обычно при решении подобных задач применяют координатный метод. При этом направляют ось x вниз, выбрав её начало в точке, где находился первый камень вначале, затем записывают уравнения зависимости координат от времени:

$$x_1 = v_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = l + \frac{gt^2}{2},$$

после чего приравнивают координаты, откуда находят искомое время:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow v_0 t + \frac{gt^2}{2} = l + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \frac{l}{v_0} = 10\,\text{с}.$$

Ответ: 10 с.

Второй способ решения.

Поскольку относительно Земли ускорения тел одинаковы, то в СО, связанной с первым телом, второе будет двигаться прямолинейно и равномерно. Докажем это строго.

Запишем уравнения зависимости скорости каждого тела от времени:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{g}t \text{ и } \vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{g}t$$

Тогда относительная скорость равна

$$\vec{v}_{2-1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{02} + \vec{g}t - (\vec{v}_{01} + \vec{g}t) =$$
$$= \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} = const.$$

Итак, относительная скорость не меняется в процессе движения, оставаясь равной разности векторов начальных скоростей тел.

В нашем случае относительная скорость равна $v_{2-1} = v_0 = 2\,\text{м/с}$. После чего мы мгновенно приходим к ответу: для того, чтобы с этой постоянной скоростью пройти расстояние l = 20 м, требуется время

$$t = \frac{l}{v_0} = 10\,\text{с}.$$

Таким образом, формально решение свелось к одной строчке.

А как быть в тех случаях, когда тела движутся не по одной прямой? Оказывается, что и здесь решение задач значительно упрощается при переходе в другую СО.

Задача 11. Два камня расположены на одной горизонтали на расстоянии l = 30 м друг от друга. Один камень бросают вертикально вверх со скоростью v_{01} = 9 м/с, а второй одновременно бросают горизонтально по направлению к первому камню со скоростью v_{02} = 12 м/с. Чему равно наименьшее расстояние d_{min} между камнями в процессе движения? Сопротивление воздуха не учитывать.

Очевидно, что определение наименьшего расстояния между телами в СО, связанной с Землёй, – задача не из лёгких. По крайней мере, не видно путей для того, чтобы указать на рисунке точки, в которых при этом будут находиться тела, без достаточно сложных математических выкладок. А вот в подвижной системе всё значительно упрощается.

Изобразим на рисунке 9*а* начальные скорости камней в СО, связанной с Землёй. Мы уже видели похожий рисунок, не правда ли? Действительно, рисунок практически полностью совпадает с рисунком 4 в задаче 5 об автомобилях. Небольшое отличие лишь в индексах у скоростей: цифры 1 и 2 заменены на 01 и 02.

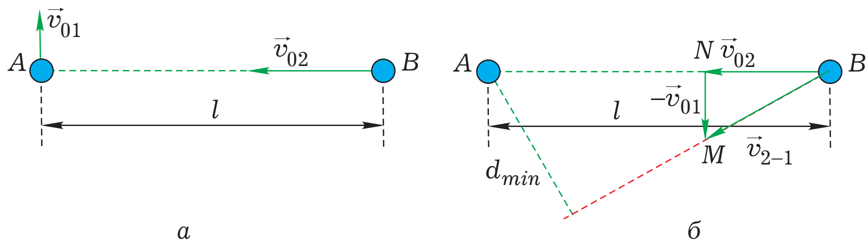

Рис. 9

Заметили ли вы, кстати, что числовые значения величин в этой задаче совпадают с аналогичными значениями в задаче 5? Таким образом, решение данной задачи будет совершенно аналогично решению задачи 5, ведь одинаковые ускорения тел данной задачи не повлияют на ход решения. Траектория движения второго камня в СО, связанной с первым, выделена красным на рисунке 9б, который отличается от рисунка 5 теми же индексами при начальных скоростях. Мы не будем повторять весь ход решения задачи 5, запишем лишь конечное выражение для искомого расстояния:

$$d_{min} = l\frac{v_{01}}{\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2}} = 18\text{ м}.$$

Ответ: 18 м.

В заключение приведём для самостоятельного решения две задачи с подсказками.

Задача 12. Два тела находились на одинаковой высоте на расстоянии 20 м друг от друга. В некоторый момент времени одно тело отпустили, а второе бросили под углом 30° к горизонту. Определите, на какое минимальное расстояние сблизились тела. Сопротивление воздуха не учитывать. (Ответ: 10 м.)

Подсказка: перейдите в СО, связанную с первым телом (рис. 10).

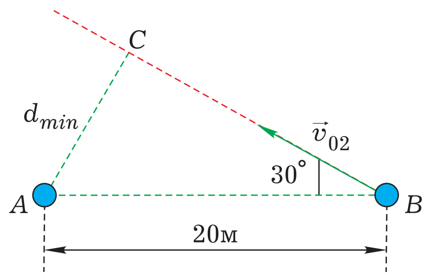

Рис. 10

Задача 13. Ракета для фейерверка на высоте 100 м разрывается в воздухе на два осколка. Скорость первого осколка равна 60 м/с и направлена под углом 45° к горизонту, скорость второго – 40 м/с и направлена в противоположную сторону. На каком расстоянии друг от друга окажутся осколки через 0,5 с? Сопротивление воздуха не учитывать. (Ответ: 50 м.)

Подсказка: свяжите СО с центром масс системы.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

О Роберте Милликене

Помню, как Резерфорд привёл ко мне в лабораторию Милликена и сказал:

– Позвольте Вас представить Милликену. Вы, несомненно, знаете, кто он. Покажите ему установку для получения сильных магнитных полей и расскажите о своих опытах, но вряд ли он будет слушать Вас, он сам начнёт рассказывать о своих опытах.

После ухода Резерфорда я скоро убедился, что его пророчество оказалось верным.

П. Капица